Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele IX-XII
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda II

Problema 1.

Fie $n,\ k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{k+1}>n$. Să se calculeze suma $S=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Soluție:

Scriem suma $S=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{n}{2^{i+1}}+\frac{1}{2}\right]$. Din identitatea lui Hermite avem că $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$. Folosind aceasta în suma S, pentru $x=\frac{n}{2^{i+1}}$, obținem

$S=\sum_{i=0}^{k}\left(\left[\frac{n}{2^i}\right]-\left[\frac{n}{2^{i+1}}\right]\right)=[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=n-0=n$.

Problema 2.

Fie $a,\ b,\ c\in(0,1)$ sau $a,\ b,\ c\in(1,+\infty)$. Să se determine minimul expresiei $E(a,b,c)=\log_a b+\sqrt{\log_b c}+\sqrt[3]{\log_c a}$ și tripletele de numere (a,b,c) pentru care se obține valoarea minimă a expresiei.

Soluție:

$E(a,b,c)=\log_a b+\frac{1}{2}\sqrt{\log_b c}+\frac{1}{2}\sqrt{\log_b c}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\log_c a}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\log_c a}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\log_c a}$. Evident, $\log_a b,\ \log_b c,\ \log_c a>0$ și $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$.

Folosind inegalitatea mediilor, obținem $E(a,b,c)\geq 6\cdot\sqrt[6]{\log_a b\cdot\frac{\log_b c}{4}\cdot\frac{\log_c a}{27}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}$.

$\min E(a,b,c)=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}$ și se atinge pentru $\log_a b=\frac{\sqrt{\log_b c}}{2}=\frac{\sqrt[3]{\log_c a}}{3}=k$. Din $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$, obținem $k\cdot 4k^2\cdot 27k^3=1\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$ și vom avea tripletele $\left(a,\ a^{\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}},\ a^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}\right)$.

Problema 3.

Câte soluții $X\in M_2(\mathbb{C})$ are ecuația $X^{2017}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$?

Soluție:

Fie $X\in M_2(\mathbb{C})$ o soluție a ecuației $X^{2017}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Atunci $X^{4034}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Din $X^{4034}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ obținem $X^2=O_2$ (pentru că $\det X=0$ și $X^{4034}=(TrX)^{4033}X\Rightarrow TrX=0$ și, conform relației Hamilton-Cayley, avem $X^2=O_2$).

Dar $X^2=O_2\Rightarrow X^{2017}=O_2\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. În concluzie, ecuația nu are soluții.